Exercice N°6

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par: $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a: $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$ et montrer que pour tout $p \geq 2$, on a: $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $-2+2\sqrt{n+1} \leq u_n \leq -1+2\sqrt{n}$
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a: $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$ et montrer que pour tout $p \geq 2$, on a: $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$

on a $p \geqslant 1$.

$1 \leqslant p \leqslant u \leqslant p+1$

$\Rightarrow \sqrt{p} \leqslant \sqrt{u} \leqslant \sqrt{p+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$

les deux fonction $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{p}}$

sont continues sur $[p, p+1]$